Spazi di Sobolev sulla sfera unitaria

1. Darivata radiale e derivata tangenziale

Sia $\varphi : \partial B_R \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che esiste una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$u = \varphi \quad \text{su} \quad \partial B_R.$$

Definiamo il gradiente tangenziale

$$\nabla_\theta \varphi : \partial B_R \to \mathbb{R}^d$$

come

$$\nabla_\theta \varphi(R\theta) := R\Big(\nabla u(R\theta) - \big(\theta \cdot \nabla u(R\theta)\big)\,\theta\Big) \quad \text{per ogni} \quad \theta \in \partial B_1 \ .$$

Osserviamo che questa definizione dipende solo dalla funzione φ e non dall'estensione u. Infatti, per ogni $h \in \mathbb{R}^d$, la differenziabilità di u implica

$$u\left(R\frac{\theta+h}{|\theta+h|}\right) = u(R\theta) + R\left(\frac{\theta+h}{|\theta+h|} - \theta\right) \cdot \nabla u(R\theta) + o\left(R\frac{\theta+h}{|\theta+h|} - R\theta\right).$$

D'altra parte

$$|\theta+h| = \sqrt{1 + 2\theta\cdot h + |h|^2} = 1 + \theta\cdot h + o(|h|).$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\theta+h}{|\theta+h|} - \theta &= \frac{\theta + h - \theta|\theta+h|}{|\theta+h|} \\
&= \frac{\theta + h - \theta\big(1+\theta\cdot h + o(|h|)\big)}{|\theta+h|} \\
&= \Big(\theta + h - \theta\big(1+\theta\cdot h + o(|h|)\big)\Big)\big(1 - \theta\cdot h + o(|h|)\big) = h - (\theta\cdot h)\theta + o(|h|).
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(R\frac{\theta+h}{|\theta+h|}\right) = u\left(R\frac{\theta+h}{|\theta+h|}\right) &= u(R\theta) + R\Big(h - (\theta\cdot h)\theta\Big)\cdot \nabla u(R\theta) + o\left(|h|\right) \\
&= u(R\theta) + Rh\cdot\Big(\nabla u(R\theta) - \big(\theta\cdot\nabla u(R\theta)\big)\theta\Big) + o\left(|h|\right) \\
&= \varphi(R\theta) + Rh\cdot\Big(\nabla u(R\theta) - \big(\theta\cdot\nabla u(R\theta)\big)\theta\Big) + o\left(|h|\right).
\end{aligned}$$

Siccome esiste al più un vettore $v \in \mathbb{R}^d$ tale che $v \perp \theta$ e

$$\varphi\left(R\frac{\theta+h}{|\theta+h|}\right) = \varphi(R\theta) + h\cdot v + o\left(|h|\right) \quad \text{per ogni} \quad h \perp \theta,$$

abbiamo che

$$\nabla_\theta \varphi(R\theta) := R\Big(\nabla u(R\theta) - \big(\theta\cdot\nabla u(R\theta)\big)\Big) \ .$$

non dipende dall'estensione u.

Per ogni $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiamo la derivata radiale

$$\partial_r u(x) := \frac{x}{|x|}\cdot\nabla u(x).$$

Allora,

$$\nabla u(R\theta) = \theta\,\partial_r u(R\theta) + \frac{1}{R}\nabla_\theta u(R\theta).$$

ed anche

$$|\nabla u|^2(R\theta) = |\partial_r u|^2(R\theta) + \frac{1}{R^2}|\nabla_\theta u|^2(R\theta),$$

per ogni $R > 0$ ed ogni $\theta \in \partial B_1$.

2. Lo spazio $H^1(\partial B_1)$

Definizione 1. *$H^1(\partial B_1)$ è la chiusura di $C^\infty(\partial B_1)$ rispetto alla norma*

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\partial B_1)} := \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta \varphi|^2 \, d\theta + \int_{\partial B_1} \varphi^2(\theta)\, d\theta,$$

dove $d\theta$ indica la misura sulla sfera ∂B_1. Lo spazio $H^1(\partial B_1)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v) \mapsto \int_{\partial B_1} \Big(\nabla u_\theta \cdot \nabla v_\theta + uv\Big)\, d\theta.$$

Teorema 2. *Data una funzione misurabile $u : \partial B_1 \to \mathbb{R}$, sono equivalenti:*
- (i) *$u \in H^1(\partial B_1)$;*
- (ii) *per ogni carta locale $\Phi : \Omega \to \partial B_1$, la funzione $u \circ \Phi$ è in $H^1(\Omega)$.*

Teorema 3. *L'inclusione $H^1(\partial B_1) \hookrightarrow L^2(\partial B_1)$ è compatta.*

Teorema 4. *Data una funzione $u \in H^1(\partial B_1)$, sono equivalenti:*
- (i) *u è costante;*
- (ii) *$\|\nabla_\theta u\|_{L^2(\partial B_1)} = 0$.*

Teorema 5. *Esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che*

$$\int_{\partial B_1} u^2 \, d\theta \le C_d \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta u|^2 \, d\theta \quad \text{per ogni} \quad u \in H^1(\partial B_1) \quad \text{tale che} \quad \int_{\partial B_1} u(\theta)\, d\theta = 0.$$

Corollario 6. *Lo spazio*

$$\mathcal{H} := \Big\{u \in H^1(\partial B_1) \ : \ \int_{\partial B_1} u(\theta)\, d\theta = 0\Big\}$$

è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v) \mapsto \int_{\partial B_1} \nabla u_\theta \cdot \nabla v_\theta \, d\theta.$$

---

3. Autovalori e autovettori del Laplaciano sferico

Per ogni funzione $f \in L^2(\partial B_1)$ esiste un'unica funzione $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$\int_{\partial B_1} \nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta v \, d\theta = \int_{\partial B_1} f(\theta) v(\theta)\, d\theta \quad \text{per ogni} \quad v \in \mathcal{H}.$$

La soluzione u è anche l'unico minimo del funzionale

$$\mathcal{H} \ni u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta u|^2 \, d\theta - \int_{\partial B_1} uf \, d\theta.$$

Inoltre, l'operatore

$$\mathcal{R} : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{L} := \Big\{u \in L^2(\partial B_1) \ : \ \int_{\partial B_1} u(\theta)\, d\theta = 0\Big\}$$

definito come

$$R(f) := u$$

è un operatore lineare, continuo, simmetrico, positivo e compatto. Esiste quindi una successione di autofunzioni

$$\phi_n \in H^1(\partial B_1) \quad \text{tali che} \quad \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta)\, d\theta = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_1} \phi_n^2 \, d\theta = 1$$

e autovalori

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \dots$$

tali che per ogni n
$$-\Delta_{\partial B_1}\phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \text{su} \quad \partial B_1.$$
La famiglia di autofunzioni $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ è un sistema ortonormale completo dello spazio di Hilbert $L^2(\partial B_1)$. Per ogni vettore
$$v \in \mathcal{L}$$
la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$ converge in $L^2(\partial B_1)$ e
$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n,$$
dove
$$a_n := \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta)v(\theta)\,d\theta.$$

Teorema 7. *Sia $u \in L^2(\partial B_1)$ una funzione tale che $\displaystyle\int_{\partial B_1} u(\theta)\,d\theta = 0$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *$u \in H^1(\partial B_1)$;*

(ii) *la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n\phi_n$ converge forte in $H^1(\partial B_1)$;*

(iii) *la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2\lambda_n$ converge.*

---

4. Estensioni omogenee

Teorema 8. *Per ogni $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed $\alpha \geq 0$, definiamo la funzione*
$$u(r,\theta) = r^\alpha \phi(\theta).$$
Se
$$d > 2 \quad e \quad \alpha \geq 0 \qquad oppure \qquad d \geq 2 \quad e \quad \alpha > 0,$$
allora si ha che $u \in H^1(B_1)$ e
$$\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx = \int_0^1 r^{d-3+2\alpha} \int_{\partial B_1} \Big(\alpha^2\phi^2(\theta) + |\nabla_\theta \phi|^2\Big)\,d\theta\,dr\,.$$

Proof. Basta dimostrare il teorema nel caso
$$\varphi \in C^\infty(\partial B_1)$$
e poi procedere per approssimazione. In questo caso abbiamo che
$$u \in L^2(B_1) \qquad \text{e} \qquad |\nabla u| \in L^2(\partial B_1),$$
dove il gradiente ∇u è definito (ed è C^∞) in ogni punto di $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Basta quindi verificare che $|\nabla u|$ è il gradiente debole (in senso degli sopazi di Sobolev) di u. Prendiamo una funzione $w \in C_c^\infty(B_1)$ e calcoliamo
$$\begin{aligned}\int_{B_1} \Big(w\partial_j u + u\partial_j w\Big)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_1\setminus B_\varepsilon} \Big(w\partial_j u + u\partial_j w\Big)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_j\,wu,\end{aligned}$$
dove ν_j è la j-esima componente del vettore normale ν.

Ora, siccome $u(\varepsilon,\theta) = \varepsilon^\alpha\varphi(\theta)$ e w è limitata, abbiamo che
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_j\,wu = 0.$$
□

Teorema 9. *Sia $u \in H^1(B_1)$. Allora, per Lebesgue quasi-ogni $r \in (0,1)$ la funzione*
$$\phi_r(\theta) := u(r\theta)$$
è in $H^1(\partial B_1)$.

Proof. Sia φ_n una successione di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge a u forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, la successione φ_n è di Cauchy e si ha
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\varphi_n - u)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n - u|^2\,dx \ge \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \Big(|\varphi(r\theta) - u(r\theta)|^2 + \frac{1}{r^2}\big|\nabla_\theta\big(\varphi_n(r\theta) - u(r\theta)\big)\big|^2\Big)\,d\theta\,dr.$$
Di conseguenza, a meno di estrarre una sottosuccessione, esiste un insieme $\mathcal{N} \subset (0,+\infty)$ di misura (1-dimensionale) di Lebesgue nulla e tale che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial B_1} |\varphi(r\theta) - u(r\theta)|^2\,d\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial B_1} \big|\nabla_\theta\big(\varphi_n(r\theta) - u(r\theta)\big)\big|^2\,d\theta = 0,$$
per ogni $r \in (0,+\infty) \setminus \mathcal{N}$. □

---

5. Funzioni armoniche omogenee

Proposizione 10. *Date una funzione $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed un $\alpha > 0$, sono equivalenti:*

(i) *la funzione $u(r,\theta) = r^\alpha \phi(\theta)$ è armonica in $\mathbb{R}^d$;*

(ii) *la funzione ϕ è soluzione di*
$$-\Delta_{\partial B_1}\phi = \lambda\phi \quad su \quad \partial B_1,$$
dove
$$\lambda = \alpha(\alpha + d - 2).$$

Proof. Siano $\psi \in C^\infty(\partial B_1)$, $v(r,\theta) = r^\alpha \psi(\theta)$ e $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot \nabla w\,dx &= \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \Big(\partial_r v\,\partial_r w + \frac{1}{r^2}\nabla_\theta v \cdot \nabla_\theta w\Big)\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \Big(\alpha r^{\alpha-1}\psi(\theta)\,\partial_r w(r\theta) + r^{\alpha-2}\nabla_\theta\psi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta)\Big)\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\psi(\theta)\,w(r\theta) + \nabla_\theta\psi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta)\Big)\,d\theta\,dr.\end{aligned}$$
Ora, approssimando ϕ con funzioni C^∞ sulla sfera otteniamo
$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla w\,dx = \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\phi(\theta)\,w(r\theta) + \nabla_\theta\phi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta)\Big)\,d\theta\,dr.$$
Supponiamo ora che u sia armonica. Allora scegliendo w come
$$w(r,\theta) = \eta(\theta)g(r),$$
con $g \in C_c^\infty(0,+\infty)$ e $g \ge 0$, abbiamo che
$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\phi(\theta)\,g(r)\eta(\theta) + g(r)\nabla_\theta\phi(\theta) \cdot \nabla_\theta\eta(\theta)\Big)\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} g(r)\,dr \int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\phi(\theta)\,\eta(\theta) + \nabla_\theta\phi(\theta) \cdot \nabla_\theta\eta(\theta)\Big)\,d\theta.\end{aligned}$$
Di conseguenza,
$$\int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\phi(\theta)\,\eta(\theta) + \nabla_\theta\phi(\theta) \cdot \nabla_\theta\eta(\theta)\Big)\,d\theta = 0$$
e quindi ϕ è soluzione debole di
$$-\Delta_{\partial B_1}\phi = \alpha(\alpha+d-2)\phi. \tag{1}$$
Viceversa, se vale (1), allora
$$\int_{\partial B_1} \Big(-\alpha(\alpha+d-2)\phi(\theta)\,w(r\theta) + \nabla_\theta\phi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta)\Big)\,d\theta,$$

per ogni funzione $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $r > 0$. Di conseguenza,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = 0.$$

□

Proposizione 11. *Se u è una funzione armonica in $\mathbb{R}^d$ e α-omogenea per un qualche $\alpha \geq 0$, allora u è un polinomio.*

Proposizione 12. *Se $\phi \in H^1(\partial B_1)$ è un autofunzione del Laplaciano sferico con autovalore $\lambda > 0$, allora ϕ è C^∞ (è la traccia di un polinomio) e λ è della forma*

$$\lambda = \alpha(\alpha + d - 2),$$

dove $\alpha \geq 0$ è un intero.

---

6. Funzioni armoniche in B_1

Siano ϕ_n, $n \geq 1$, le autofunzioni del Laplaciano sferico e siano λ_n i corrispondenti autovalori ordinati in una successione crescente

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

Per ogni $n \geq 1$ definiamo $\alpha_n > 0$ come l'unico numero reale positivo tale che

$$\alpha_n(\alpha_n + d - 2) = \lambda_n.$$

Inoltre, poniamo anche

$$\alpha_0 = \lambda_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{d\omega_d}},$$

dove ω_d è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$. Osserviamo che per ogni coppia di indici

$$0 \leq i \neq j$$

abbiamo

$$\int_{\partial B_1} \phi_i(\theta)\phi_j(\theta) \, d\theta = \int_{\partial B_1} \nabla_\theta \phi_i \cdot \nabla_\theta \phi_j \, d\theta = 0.$$

Per ogni $n \geq 0$ definiamo il polinomio armonico omogeneo

$$h_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad h_n(r, \theta) = r^{\alpha_n} \phi_n(\theta),$$

e osserviamo che per ogni coppia di indici $0 \leq i \neq j$

$$\int_{B_1} \nabla h_i \cdot \nabla h_j \, dx = 0.$$

Lemma 13. *Sia $\phi \in H^1(\partial B_1)$ una funzione tale che*

$$\phi(\theta) = \sum_{k=0}^{N} c_k \phi_k(\theta),$$

Allora, la funzione armonica, soluzione di

$$\Delta h = 0 \quad in \quad B_1, \qquad h = \phi \quad su \quad \partial B_1$$

è data da

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k h_k,$$

dove la convergenza della serie è forte in $H^1(B_1)$. Inoltre,

$$\int_{B_1} |\nabla h|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{N} c_k^2 \alpha_k.$$

Teorema 14. *Sia $\phi \in L^2(\partial B_1)$ e sia*

$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n(\theta),$$

il suo sviluppo in armoniche sferiche in $L^2(\partial B_1)$. Allora, sono equivalenti:

(i) *ϕ è la traccia di una funzione $u \in H^1(B_1)$;*

(ii) *ϕ è la traccia di una funzione $h \in H^1(B_1)$ armonica in B_1;*

(iii) *la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \alpha_n$ converge.*

Inoltre, la funzione armonica h è data da

$$h = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n,$$

dove la convergenza della serie è forte in $H^1(B_1)$ ed il suo integrale di Dirichlet è

$$\int_{B_1} |\nabla h|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \alpha_n.$$

Proof. Osserviamo intanto che (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Quindi, basta dimostrare che (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).
Possiamo supporre che $c_0 = 0$.

<u>Dimostriamo prima che (iii) $\Leftrightarrow$ (ii)</u>. Consideriamo la traccia

$$p_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(\theta)$$

e la funzione armonica

$$H_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} c_k h_k.$$

Abbiamo che

$$\int_{B_1} |\nabla (H_n - H_m)|^2 \, dx = \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 \alpha_k.$$

Siccome H_n e H_m hanno media nulla su B_1, per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo che la successione $(H_n)_n$ è di Cauchy in $H^1(B_1)$. Sia H il limite forte di H_n. In particolare, per il teorema della traccia,

$$T(H) = \lim_{n\to\infty} T(H_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k = \phi,$$

dove entrambi limiti sono forti in $L^2(\partial B_1)$ e dove $T(H)$ è la traccia di H su ∂B_1.

<u>Dimostriamo prima che (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)</u>. Per ogni $r < 1$, consideriamo la funzione

$$h_r(x) = h(xr) \qquad \text{per ogni} \quad x \in B_1.$$

Allora:

- $h_r \in C^\infty(B_1)$ e la sua traccia su ∂B_1 è data da
$$h_r(\theta) = h(r\theta), \quad h_r \in C^\infty(\partial B_1).$$
- Quando $r \to 1$, la successione h_r converge forte-$H^1(B_1)$ a h, mentre le tracce $h_r : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ convergono forte-$L^2(\partial B_1)$ a ϕ.
- Siccome $h_r \in C^\infty$, abbiamo che la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n$$
converge, dove
$$\langle h_r, \phi_n \rangle = \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta) h_r(\theta) \, d\theta.$$

In particolare,

$$\int_{B_1} |\nabla h_r|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n.$$

Di conseguenza, per ogni $N > 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} c_n^2 \alpha_n &= \sum_{k=1}^{N} \langle h, \phi_n \rangle^2 \alpha_n \\
&= \lim_{r \to 1} \sum_{k=1}^{N} \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n \\
&\leq \lim_{r \to 1} \int_{B_1} |\nabla h_r|^2 \, dx = \int_{B_1} |\nabla h|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

□